

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике
2016–2017 уч. год
Решения

5 класс

1. (3 балла)

Решение:

Понедельник, 12.00 + 24 часа = вторник, 12.00

Вторник, 12.00 + 24 часа = среда, 12.00

Среда, 12.00 + 24 часа = четверг, 12.00

Четверг, 12.00 + 24 часа = пятница, 12.00

$24 \cdot 4 = 96$, есть еще 4 часа

Пятница, 12.00 + 4 часа = пятница, 16.00.

Ответ: Пятница, 16.00.

2. (3 балла)

Ответ: 20 150 руб. Указание: Если частей 2016, то разрезов должно быть на один меньше, $2015 \cdot 10 = 20150$.

3. (4 балла)

Ответ: 0. Решение: $101101 \cdot 777 - 101 \cdot 777777 = 78555477 - 78555477 = 0$

4. (5 баллов)

Ответ: ДК – зелёный, ЗМ – красный, О – синий.

5. (6 баллов)

Ответ: Вилки – 14, ножей – 7, ложек – 16.

Решение: Пусть ножей положили x , тогда вилок – $2x$, ложек – $2x + 2$.

Получаем уравнение, $x + 2x + 2x + 2 = 37$, $5x + 2 = 37$, $x = 7$. Второе рассуждение: Если от 37 отнять 2, останется пять равных частей, значит одна часть равна 7. Отсюда следует ответ.

6 класс

1. (3 балла) a – количество десятков, b – количество единиц

$$10a + b = (a + b)8$$

$$10a - 8a = 8b - b$$

$$2a = 7b$$

$$a = 7$$

$$b = 2$$

Ответ: 72

Можно подобрать число по таблице умножения на 8:

$$72 = 8 \cdot 9 = 8 \cdot (7 + 2)$$

2. (3 балла)

Ответ: 24 см².

3. (4 балла) 1. $27 - 5 = 22$ (ученика) – посещают кружок

2. $22 - 19 = 3$ (ученика) – посещают только химический кружок

3. $6 - 3 = 3$ (ученика) – посещают оба кружка

Ответ: 3 ученика (химика) посещают кружок математики.

4. (5 балла)

Примем объем бассейна за условную единицу.

За 1 час бассейн наполняется первой трубой на $\frac{1}{5}$ часть

За 1 час бассейн опорожняется второй трубой на $\frac{1}{6}$ часть

За 1 час бассейн наполняется на $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ часть.

Значит для полного наполнения бассейна нужно 30 часов.

Ответ: 30 часов.

5. (6 балла)

55 недель = 385 дней.

55 часов = 2 дня + 7 часов

Поэтому, 55 недель + 55 дней + 55 часов = 442 дня + 7 часов = 1 год + 77 дней + 7 часов

55 месяцев = 4 года + 7 месяцев

Итак, 55 лет + 55 месяцев + 55 недель + 55 дней + 55 часов = 55 лет + 4 года + 7 месяцев + 1 год + 77 дней + 7 часов = 60 лет + 7 месяцев + 77 дней + 7 часов.

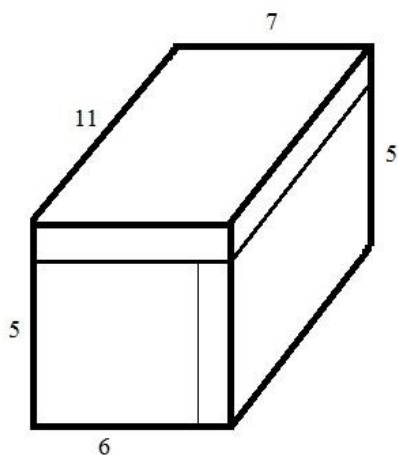
Ответ: 60 лет.

7 класс

1. (3 балла)

Ответ: 55.

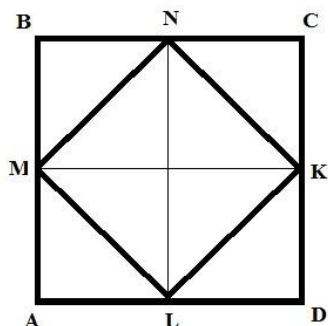
2. (3 балла)



Верхний слой состоит из 77-ми кусочков ($7 \times 11 = 77$).
Боковой слой – 55 кусочков ($5 \times 11 = 55$), следовательно, по длине коробки помещается 11 кусков сахара, по ширине – 7, а по высоте $5 + 1 = 6$.
Таким образом, первоначальные размеры параллелепипеда $11 \times 7 \times 6$.
 $V = 11 \times 7 \times 6 = 462$ (кусочка).
После того, как съели верхний и боковой слои, передний стал состоять из $5 \times 6 = 30$ кусочков.
 $462 - 77 - 55 - 30 = 300$.

Ответ: осталось 300 кусочков.

3. (4 балла)



Загнём углы квадрата по линиям MN, NK, KL, LM. Площадь загнутых треугольников будет равна площади квадрата MNKL. Таким образом, площадь четырехугольника MNKL будет равна половине площади квадрата ABCD, т.е. $169 : 2 = 84,5$.

Ответ: $84,5 \text{ см}^2$.

4. (5баллов)

Пусть x рублей стоит книга, тогда у Коли было $x - 35$ рублей, а у Пети $x - 50$ рублей. Получим уравнение: $x - 35 + (x - 50) : 2 = x + 15$; $x = 150$.

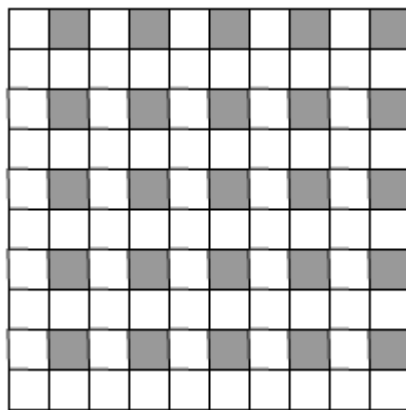
Ответ: 150 рублей стоит книга.

5. Можно ли замостить участок площадью 10×10 плитками 4×1 ? (6б).

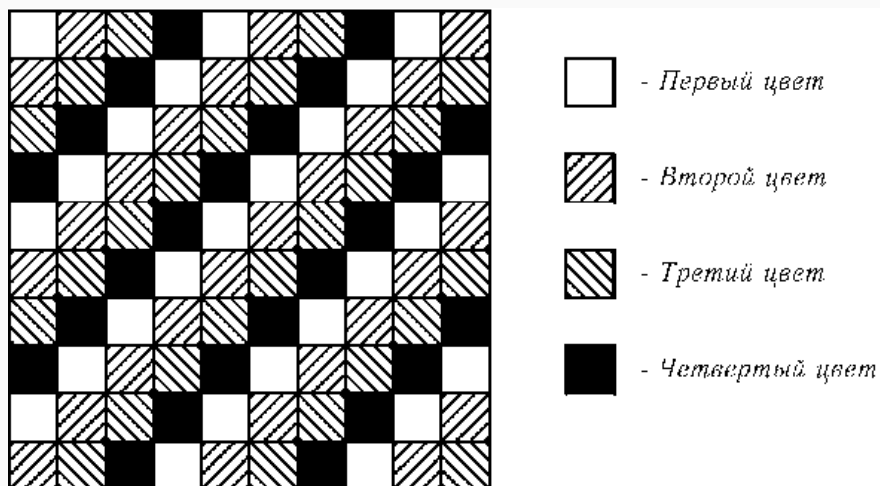
Ответ. Нет.

Решение

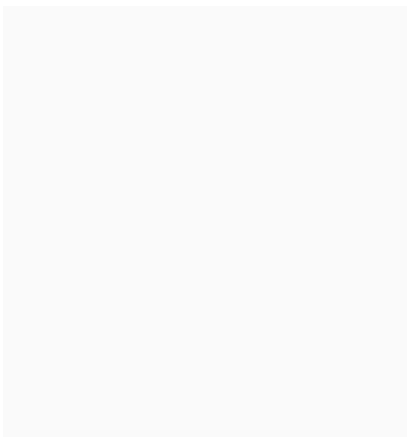
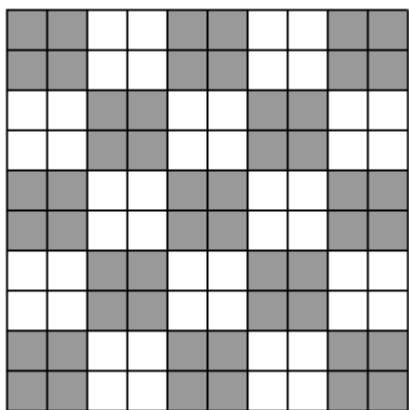
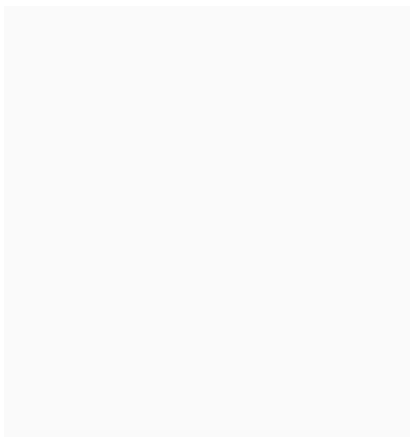
Первый способ. Покрасим часть клеток в черный цвет, а остальные — в белый (см. рисунок). Каждая плитка может содержать либо 0, либо 2 черные клетки, то есть, чётное число. Но всего черных клеток 25. Поэтому плитками 1×4 нельзя замостить доску 10×10 , так как иначе клеток черного цвета было бы четное число.



Второй способ. Раскрасим доску в четыре цвета, как показано на рисунке снизу. Легко сосчитать, что клеток второго цвета 26, а четвертого 24. Каждая плитка 1×4 накрывает по одной клетке каждого цвета. Поэтому плитками 1×4 нельзя замостить доску 10×10 , так как иначе клеток каждого цвета было бы поровну.



Третий способ. Разобьем доску на квадратики 2×2 и раскрасим их в черный и белый цвета в шахматном порядке (см. рисунок). Каждая плитка содержит 2 черные и 2 белые клетки, то есть, если бы доску можно было замостить, то клеток покрашенных в черный цвет было бы столько же, сколько клеток, покрашенных в белый цвет, а это не так.



8 класс

1. (3 балла)

Ответ: 512

Площадь квадрата равна 4, следовательно сторона квадрата равна 2. Его периметр соответственно $2 \cdot 4 = 8$. Куб числа 8 равен 512.

2. (3 балла)

Ответ: 5

При $x = 3$ и $y = 2$ получаем точные квадраты чисел равные 36.

Следовательно, значение суммы $x + y = 5$.

3. (4 балла)

Ответ: 54° .

По условию треугольник ABC равнобедренный, значит углы A и C равны, как углы при основании. Они равны $(180^\circ - 14^\circ) : 2 = 83^\circ$. По свойству вертикальных углов один из углов треугольника, содержащего угол X также равен 83° . Найдем второй внутренний угол данного треугольника: $180^\circ - (80^\circ + 57^\circ) = 43^\circ$. Тогда значение искомого угла таково: $180^\circ - (83^\circ + 43^\circ) = 54^\circ$.

4. (5 баллов)

Ответ: Ошибся.

Если барон половину затраченного времени шел со скоростью 6 км/ч, то со скоростью 5 км/ч он шел, самое большее вторую половину этого времени, то есть не дольше, чем со скоростью 6 км/ч. Но это означает, что барон, идя со скоростью 5 км/ч, прошел меньшее расстояние, чем идя со скоростью 6 км/ч. Стало быть, со скоростью 5 км/ч он прошел меньше половины пути.

5. (6 баллов)

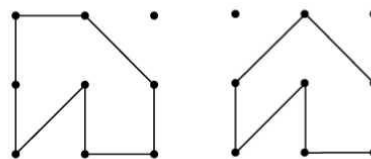
Решение: Заметим, что у каждого в компании не менее трех знакомых. Действительно, если бы некто X был знаком менее, чем с тремя, то, исключив из компании одного из его знакомых, мы получили бы пятерку людей, в которой у X не более одного знакомого, т.е. посадить их за круглый стол невозможно.

Рассмотрим любых пятерых человек и рассадим их за круглый стол. Шестой человек знаком, по крайней мере, с тремя из них; значит, он знаком с какой-то парой сидящих рядом людей. Если мы посадим шестого между ними, то получим требуемую рассадку.

.

9 класс

1. (3 балла) Примеры семиугольников изображены на рисунке. Возможны и другие варианты.



2. (3 балла) Решение:

$$x^2 - 4xy + 13y^2 - 12y + 4 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (9y^2 - 12y + 4) = (x - 2y)^2 + (3y - 2)^2$$

$$(x - 2y)^2 + (3y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y - 2 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{4}{3}; y = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

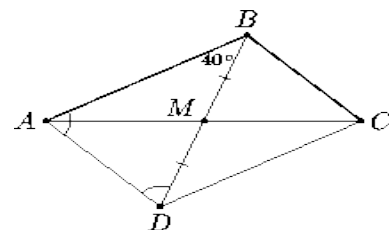
3. (4 балла) Решение. Продлим медиану ВМ за точку М на ее длину и получим точку D (см. рис.). Так как $AB = 2BM$, то $AB = BD$, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BAD = \angle BDA = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ.$$

Четырёхугольник ABCD является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\angle CBD = \angle ADB = 70^\circ$.

Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 110^\circ$.

Ответ 110° .



4. (5 баллов) Решение. $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3$

$$x^2 + x + 1 > 0 \text{ при } x \in R, \text{ то}$$

$$\frac{1}{3}(x^2 + x + 1) \leq x^2 - x + 1 \leq 3(x^2 + x + 1)$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 \leq 3x^2 - 3x + 3 \\ x^2 - x + 1 \leq 3x^2 + 3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{верно при } x \in R$$

5. (6баллов) Решение. Ответ. 225.

Если у трехзначного числа на первом месте стоит цифра 3, то две другие цифры — произвольные, отличные от 3. Значит, на втором месте может стоять любая из 9 других цифр, и на третьем — любая из 9 других цифр — всего $9 \times 9 = 81$ вариант. Если тройка стоит на втором месте, то на первом месте может стоять любая цифра, кроме 3 и 0, а на последнем — любая, кроме тройки. Всего получается $8 \times 9 = 72$ варианта. Столько же вариантов мы получим, если тройка будет стоять на последнем месте. Итого: $81 + 72 + 72 = 225$ вариантов.

10 класс

1. (3 балла) Виноград содержит 10% питательного вещества, а изюм — 95%. Поэтому 82 кг изюма содержат $82 \cdot 0,95 = 77,9$ кг питательного вещества. Таким образом, для получения 82 килограммов изюма требуется $77,9 / 0,1 = 779$ кг винограда.
2. (3 балла) Удвоенный возраст старшего попугая на 4 года больше суммы лет всех троих попугаев и равен поэтому $96 + 4 = 100$ годам. Значит, возраст старшего 50 лет. Удвоенный возраст среднего попугая на 2 года больше суммы его лет и лет младшего попугая и равен поэтому $(96 - 50) + 2 = 48$ годам. Значит, возраст среднего 24 года, а младшего 22 года.
3. (4 балла) Т. к. $x + y > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $xy + 1 < x + y \Leftrightarrow 1 - x - y(1 - x) < 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 - y) < 0$. Последнее неравенство имеет два решения:
 $\begin{cases} x < 1, \\ y > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > 1, \\ y < 1. \end{cases}$ Что и требовалось доказать.

4. 19ху – год рождения

$$\overline{19_{xy}} = 1000 + 9 \cdot 100 + 10x + y$$

$$1997 - (1000 + 9 \cdot 100 + 10x + y) = 10 \cdot (9 - x) + (7 - y) - \text{возраст}$$

$$\frac{(9-x) \cdot (7-y)}{4} + 3 = 1 + 9 + x + y, \text{ откуда } y = \frac{11x-35}{x-13}.$$

Единственное решение в целых числах: $x=1$; $y=2$.

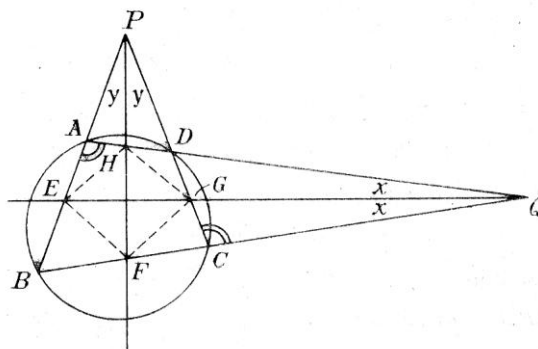
Необходимо рассмотреть 2-й случай, когда $y > 7$, тогда

$$\frac{(8-x) \cdot (17-y)}{4} + 3 = 1 + 9 + x + y, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{12y - 100}{y - 21}; \text{ следовательно, } y = 9; x = 0.$$

(5 баллов) Ответ: 1912 год, 1909 год.

5. (6 баллов) Поскольку четырёхугольник ABCD – вписанный, внешний угол DCQ равен внутреннему углу в противоположной вершине A. Так как прямая QE – биссектриса угла Q, то углы треугольника AQE соответственно равны углам треугольника CQG. Следовательно, $\angle CQG = \angle AQE$. Но $\angle CQG = \angle PGE$ (как вертикальные). Поэтому $\angle PEG = \angle PGE$ и треугольник PEG – равнобедренный.



Соответственно, биссектриса угла Р является серединным перпендикуляром к отрезку EG. Поэтому точки Н и F, расположенные на одном перпендикуляре, равноудалены от точек Е и G. Аналогично, точки Е и G равноудалены от точек Н и F и EFGH – ромб.

11 класс

1. (3 балла) Ответ: $x=1$

Решение: Подбором найдем одно из решений уравнения: $x=1$. Выражение в левой части уравнения определено только для $x \geq 1$ и является возрастающей функцией, поэтому при $x > 1$ оно будет больше постоянной величины справа.

$$2. \quad \frac{9}{4} > 2; \sqrt{\frac{9}{4}} > \sqrt{2}; \frac{3}{2} > \sqrt{2};$$

$$2^{\log_2 3} = 3 > 2\sqrt{2} = 2^{\frac{2}{3}}; \log_2 3 > \frac{3}{2} > \sqrt{2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

(3 балла)

3. (4 балла) Ответ: $\frac{1}{8}$

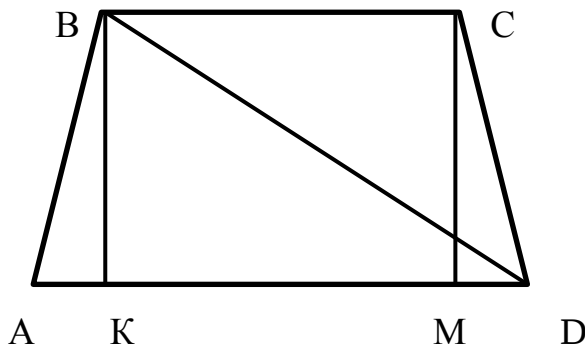
Решение: так как $a+2b=1$, $a=1-2b$, то $ab=(1-2b)b = -2b^2 + b = -2b^2 + b - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = -2\left(b - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$. Откуда $\max(ab) = \frac{1}{8}$.

4. (5 баллов) Ответ: $10\frac{5}{8}$ см.

Решение: Пусть ABCD- данная трапеция, BK и CM = высоты.

Тогда $S_{ABD} = \frac{abc}{4R}$; $AK=DM=6$ см, $BD=\sqrt{BK^2 + KD^2}$; $BD = 17$ см, $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2}$; $AB = 10$ см, $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BK$; $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 21 = 84$ см².

$R = \frac{abc}{4S}$. Отсюда $R = 10\frac{5}{8}$ см.



5. (6баллов) Ответ: (2; -1)

Решение: Преобразуем данное уравнение к виду $(x + 2y)^2 + (y + 1)^2 = 0$. Его решением будет пара (2; -1)